Pohyb nabitých částic v elektromagnetických polích

Lorentzova síla

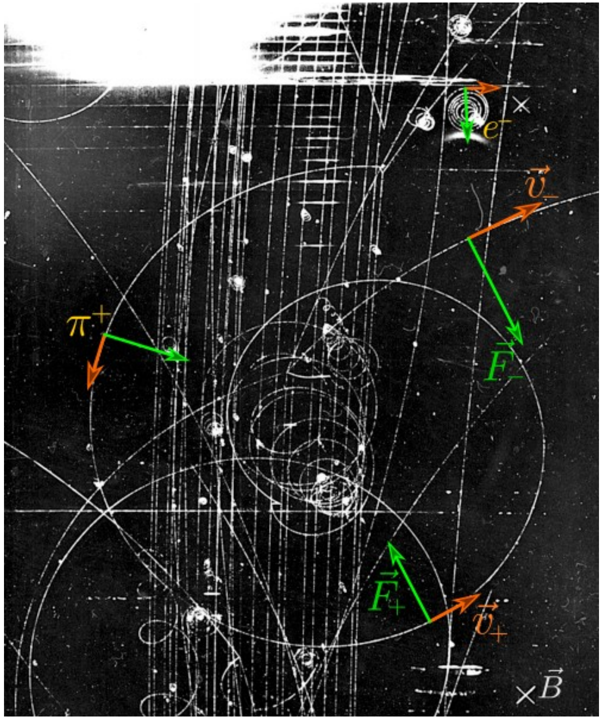
$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (|\mathbf{v}| \ll c)$$

B=const., **E**=0

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \equiv 0$$

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

→ **kinetická energie částice se zachovává**



Pozor, při $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ se kinetická energie nezachovává!

Gyrace

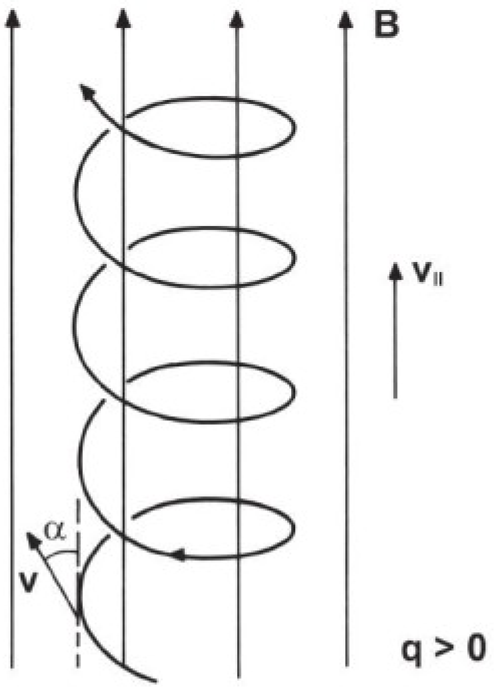
Podélná a kolmá rychlost: $$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\perp}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\parallel}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) + \mathbf{0}$$

Uvažme $\mathbf{B} = (0, 0, B) = \hat{\mathbf{z}}B$.

$$\mathbf{v}_\perp = (v_x, v_y, 0),\ \mathbf{v}_\parallel = (0, 0, v_z),\ \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B} = (v_y B, -v_x B, 0)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \det \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = B(v_y \widehat{\mathbf{x}} - v_x \widehat{\mathbf{y}})$$



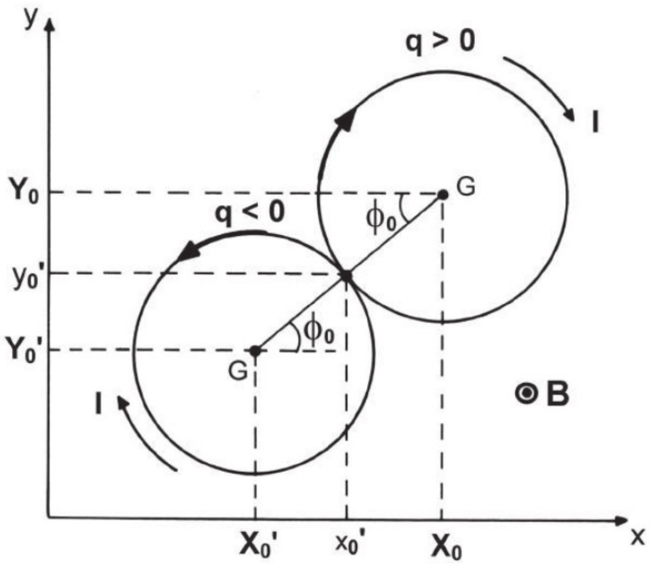
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \pm v_\perp \cos(\mp \omega_c t + \psi) \\ v_y &= \mp v_\perp \sin(\mp \omega_c t + \psi) \\ v_z &= v_\parallel \end{aligned}$$

Cyklotronová frekvence: $$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

$$v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Gyrace



$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\perp}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B})$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\perp}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Omega}_c \times \mathbf{v}_\perp$$

$$\mathbf{\Omega}_c = -\frac{q\mathbf{B}}{m} = \frac{|q|B}{m}\hat{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{c} = \omega_c \hat{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{c}$$

Jednotkový vektor $\hat{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{c}$ směřuje:

- ve směru $\mathbf{B}$ pro negativně nabitou částici ($q < 0$)
- proti směru $\mathbf{B}$ pro kladně nabitou částici ($q > 0$).

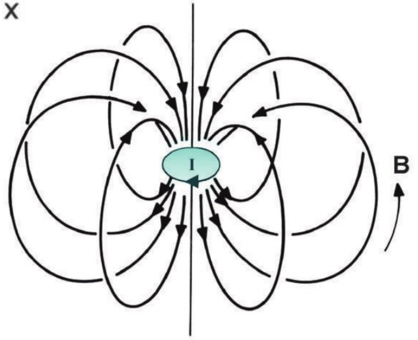
$$\boxed{\mathbf{r}_c = -\frac{\mathbf{\Omega}_c \times \mathbf{v}_\perp}{\Omega_c^2}}$$

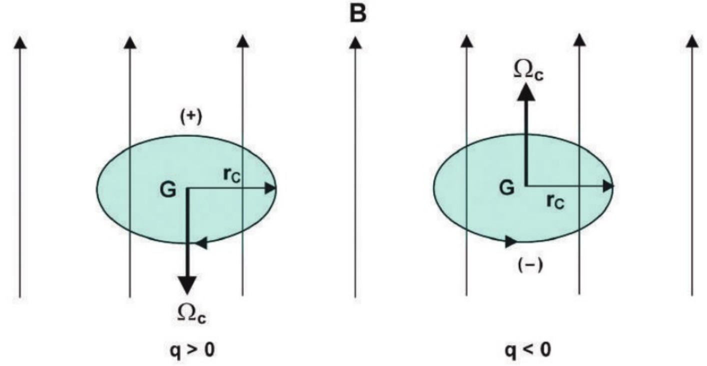
Larmorův poloměr:

$$\boxed{r_c = \frac{mv_\perp}{|q|B}}$$

Vlastnosti gyrace:

- ω_c: nezávisí na rychlosti částice, rychá i pomalá částice oblétne gyrační kružnici za stejnou dobu.
- r_c: částice s vyšší rychlostí obíhají po kružnici s větším poloměrem
- m: těžší částice gyruje větším r_c a má delší čas na jeden oběh.



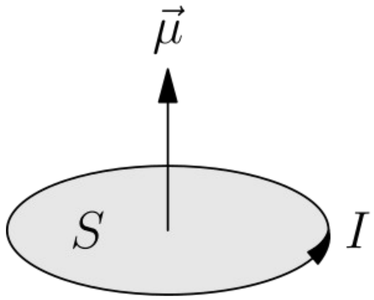


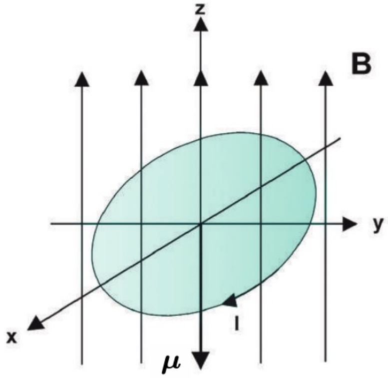
=> Plazma je diamagnetické!

Magnetický moment gyrující částice

$$\mu = \left(\left|\frac{q\omega_c}{2\pi}\right|\right)(\pi r_c^2) = \frac{mv_\perp^2}{2B}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = -\frac{W_\perp}{B^2}\mathbf{B}}$$





Magnetizace plazmatu je rovna koncentraci gyrujících částic a magnetickému momentu gyrujících částic, (který je úměrný 1/B):

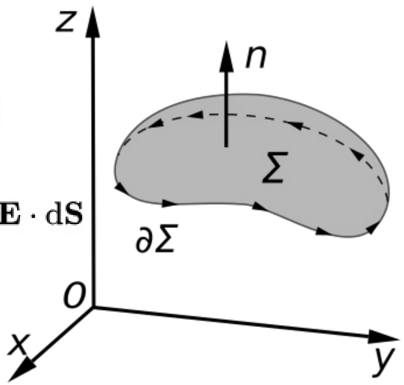
$$\mathbf{M} = n\boldsymbol{\mu}$$

Díky této nelineární závislosti ($\sim 1/B$) magnetizace na magnetickém poli se však plazma jako magnetický materiál většinou nepopisuje.

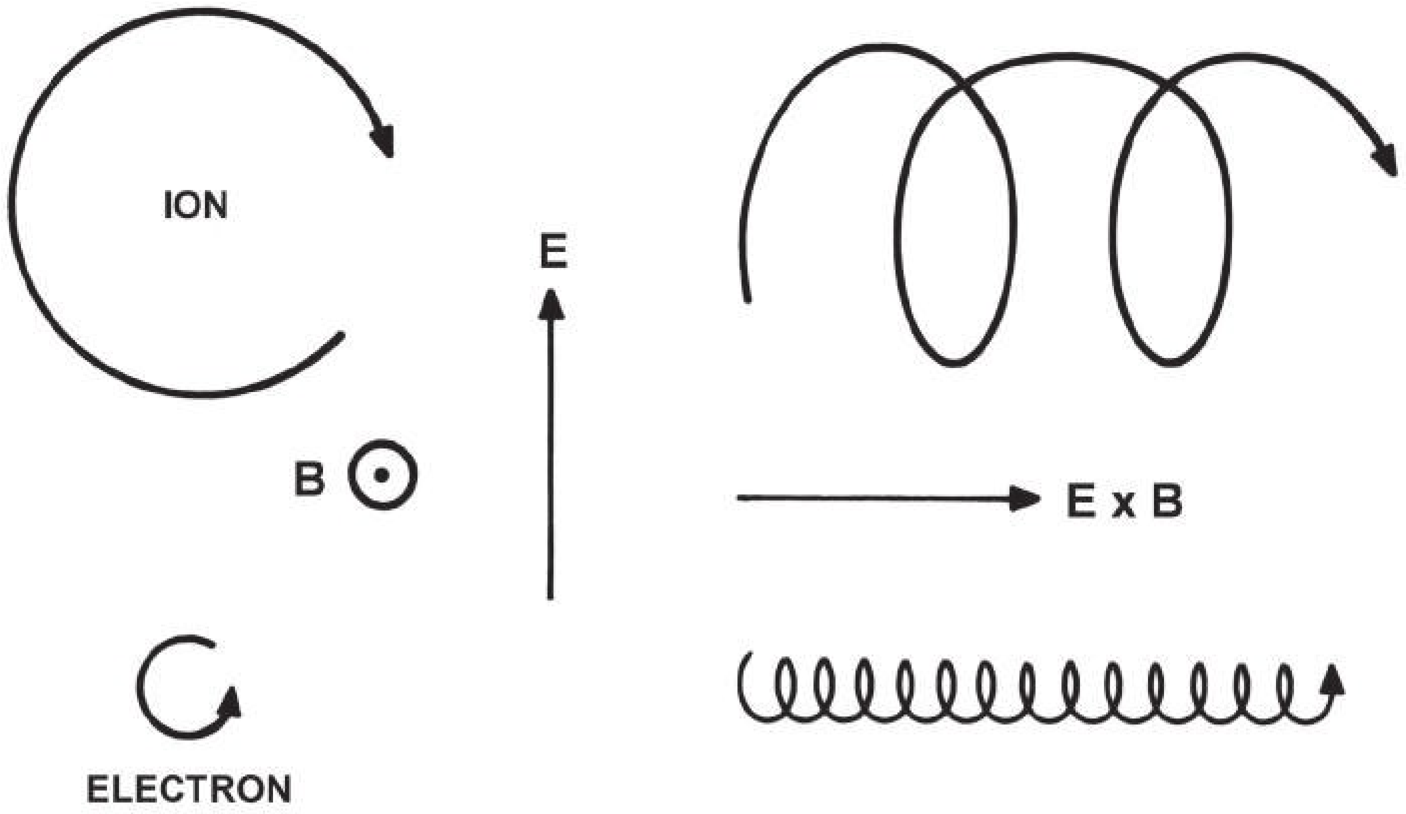
Pozor na **orientaci rychlosti částice** při použití Stokesova teorému:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$



$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift

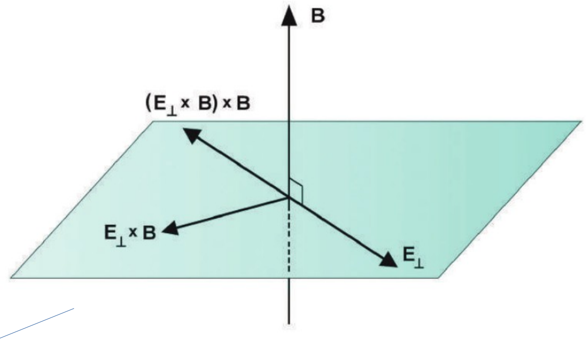


v důsledku změn velikosti rychlosti gyrující částice se deformuje gyrační kružnice a v důsledku této deformace dochází k driftu nabité částice

Drift probíhá v jedné rovině s gyrací, obrázky nejsou projekce šroubovice!

Matematika $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu

Uvažujme homogenní magnetické pole $\mathbf{B}$ a homogenní elektrické pole $\mathbf{E}$, takové že $\mathbf{B} \nparallel \mathbf{E}$.



$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}\end{aligned}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\parallel}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{E}_{\parallel} \qquad m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}'_{\perp}(t)}$$

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'_{\perp}}{\mathrm{d}t}} = q\left(-\frac{(\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} + \boxed{\mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{B}}\right)$$

gyrace

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Protože $\mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{B} = 0$:

$$\boxed{\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}}$$

Drift způsobený silou $\mathbf{F}$

Místo síly elektrického pole $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ můžeme uvážit uvážit libovolnou externí sílové pole. Analogicky k $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu dostaneme drift způsovený silou $\mathbf{F}$

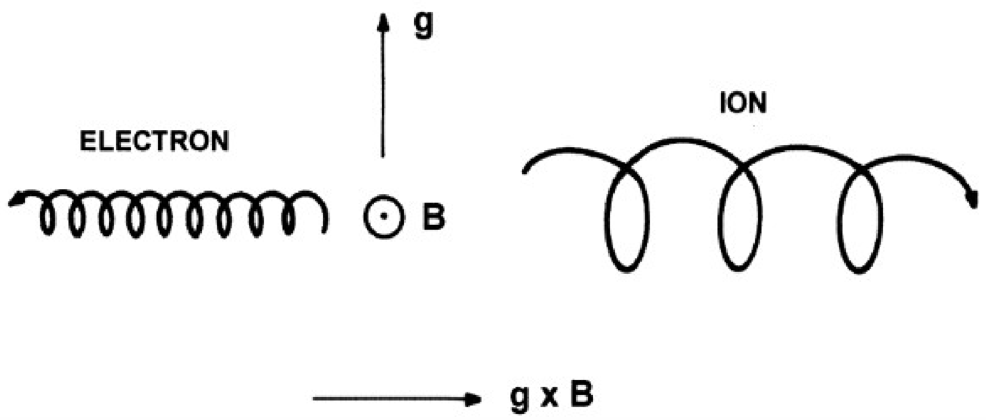
$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

Tento drift na rozdíl od $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu explicitně závisí na náboji q.

Gravitační drift

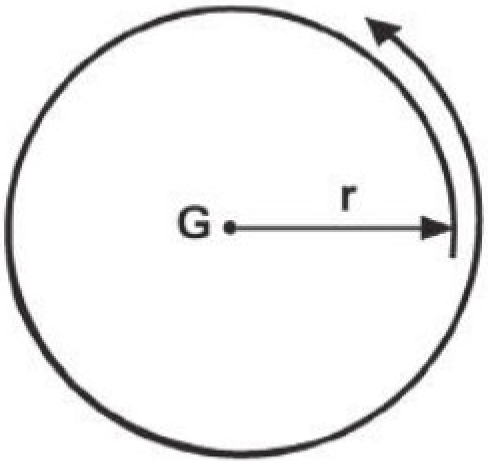
$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{v}_g = \frac{m}{q}\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

- gravitačí drift závisí na náboji částice
- gravitačí drift závisí na hmotnosti částice (ionty budou driftovat mnohem rychleji).



Drifty v nehomogenním $\mathbf{B}$ poli

Nehomogenita pole:
Budeme předpokládat že poloměr gyrace r_c je je malý ve srovnání s charakteristickou vzdáleností na které se mění $\mathbf{B}$ pole. Oddělíme gyraci a driftový pohyb, nehomogenita pole bude *malá* porucha vnějšího homogenního $\mathbf{B}$ pole.

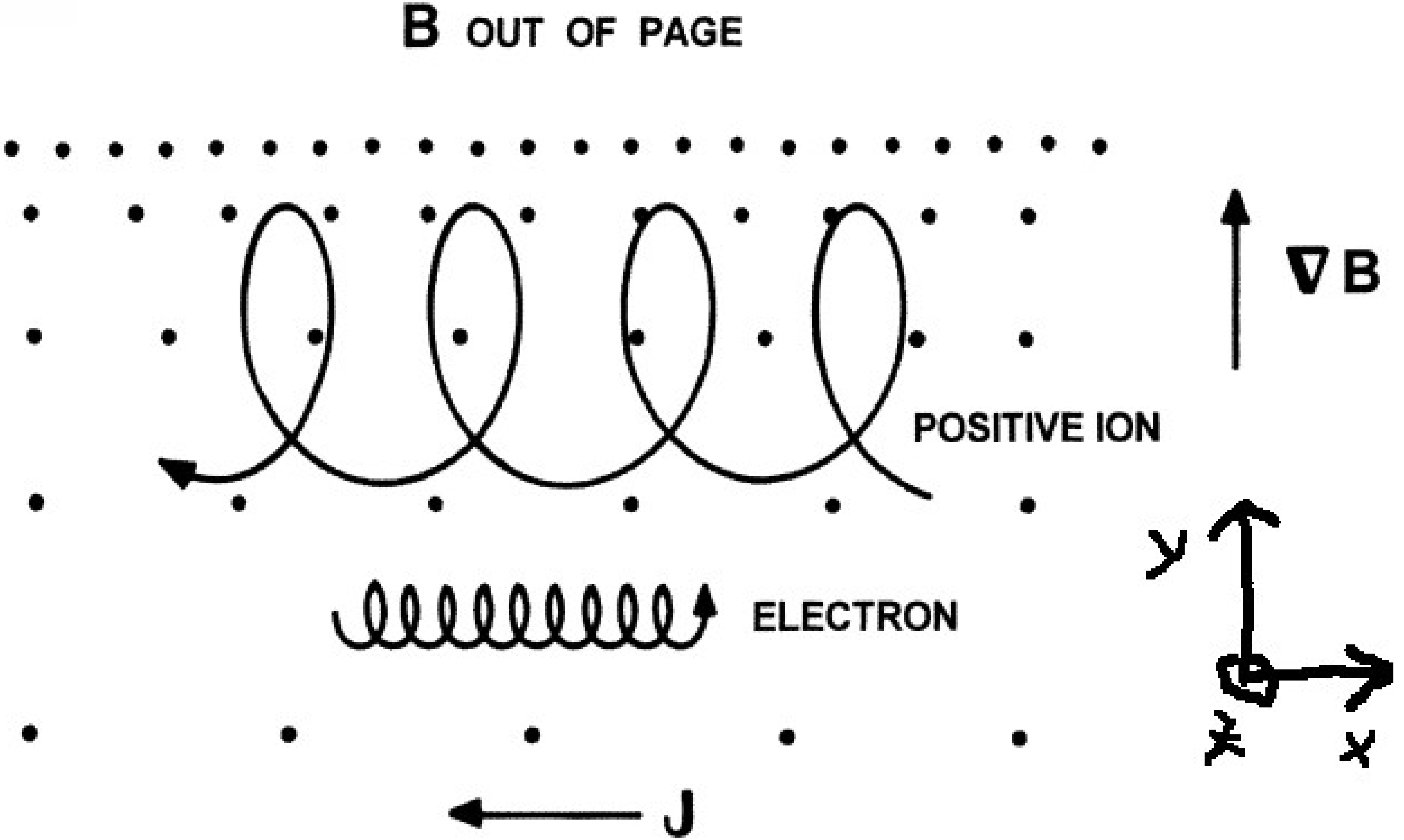


$$\delta B = r_c \, |\nabla B|$$

$$\delta B \ll B$$

Trajektorie nabitých částic jsou téměř uzavřené gyrační kružnice.

∇B drift



Driftová rychlost ∇B driftu by měla záviset na náboji!

Matematika 'grad-B' driftu

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z(y))$$

Malá nehomogenita:

$$B_z(y) = B_0 + y\left[\frac{\partial B_z}{\partial y}\right] + \text{h.o.t.}$$

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{qB^2}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}qv_yB_z - \hat{\mathbf{y}}qv_xB_z \simeq \hat{\mathbf{x}}qv_y\left(B_0 + y\left[\frac{\partial B_z}{\partial y}\right]\right) - \hat{\mathbf{y}}qv_x\left(B_0 + y\left[\frac{\partial B_z}{\partial y}\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
x_c &= r_c\cos(\mp\omega_c t + \psi)\\
y_c &= r_c\sin(\mp\omega_c t + \psi)\\
v_x &= \pm v_\perp\sin(\mp\omega_c t + \psi)\\
v_y &= \mp v_\perp\cos(\mp\omega_c t + \psi)
\end{aligned}$$

$$\langle F_x\rangle = 0,$$

$$\langle F_y\rangle = \frac{\mp qv_\perp r_c}{2}\left[\frac{\partial B_z}{\partial y}\right] = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\frac{\partial B_z}{\partial y}$$

Střední hodnota:

$$\langle\cdot\rangle = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}(\cdot)\,\mathrm{d}t$$

- Rychlejší částice driftují rychleji protože mají větší r_c a jejich orbity tak očichávají větší oblast nehomogenity.
- ∇B-drift závisí na q a způsobuje tedy makroskopický proud.

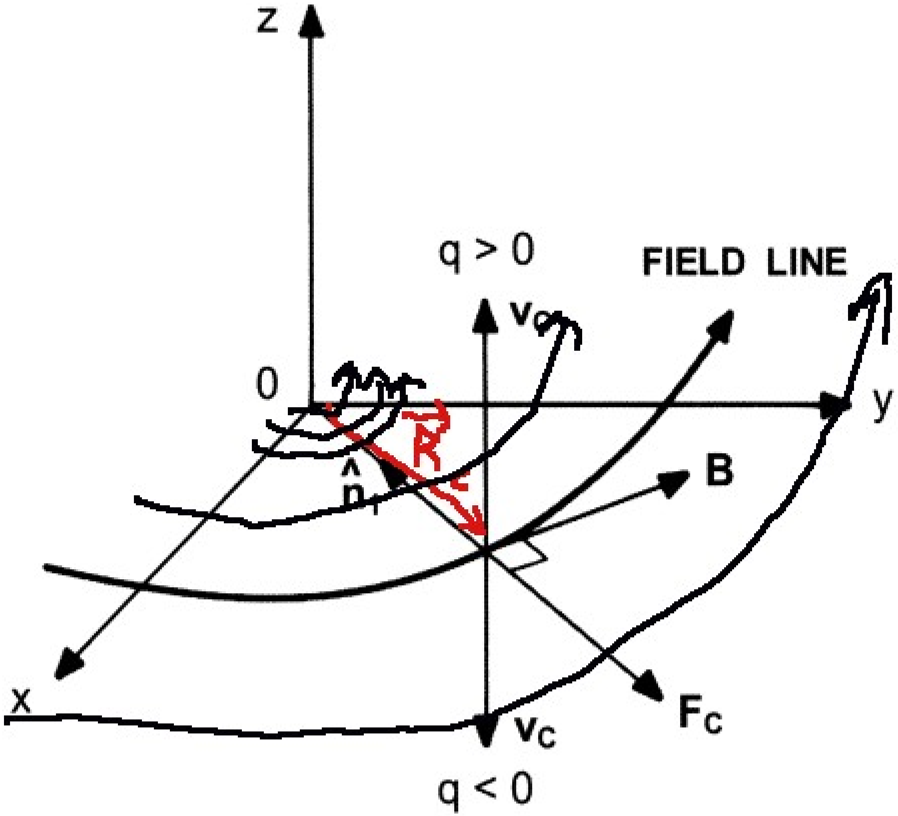
$$\boxed{\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\frac{1}{q}\frac{\nabla B\times\mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\mu}{q}\frac{\nabla B\times\mathbf{B}}{B^2}}$$

kde $\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$ je *magnetický moment* gyrující částice

Drift zakřivení

Odstředivá síla:

$$\mathbf{F}_c = \frac{mv_\parallel^2}{R_c}\frac{\mathbf{R}_c}{R_c}$$



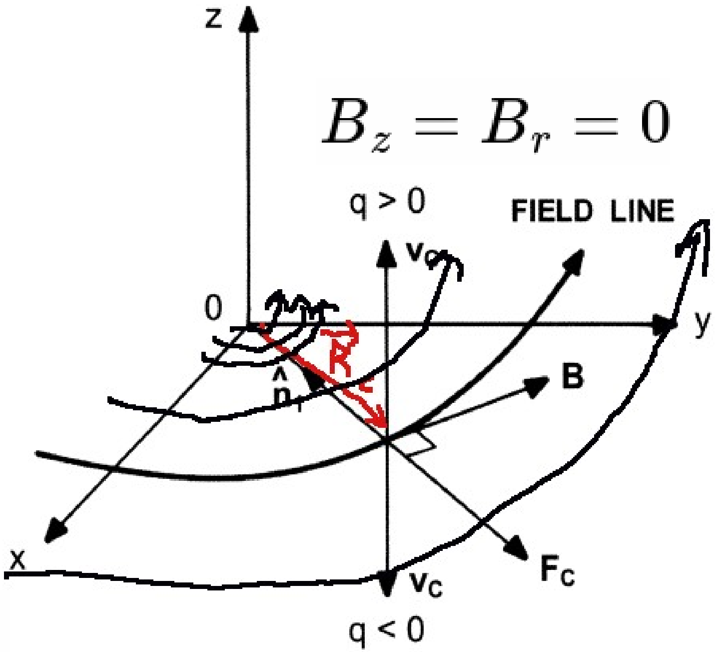
$$\boxed{\mathbf{v}_{R_c} = \frac{mv_\parallel^2}{qR_c^2}\frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{B^2}}$$

Vakuové $\mathbf{B}$ pole

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right. \ldots$$
$$+\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right. \ldots$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right. \ldots$$

$$B_z = B_r = 0$$



$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi) = 0 \quad \text{tedy} \quad B_\varphi = \frac{A}{r}$$

V místě gyračního středu $r = R_c$:

$$\frac{\partial}{\partial r} B_\varphi \bigg|_{r=R_c} = -\frac{A}{r^2}\bigg|_{r=R_c} = -\frac{A}{R_c^2} = -\frac{B_\varphi R_c}{R_c^2} = -\frac{B_\varphi}{R_c}$$

Protože $\mathbf{B}$ má pouze komponentu B_φ

$$\nabla B = -\frac{B}{R_c^2}\mathbf{R}_c$$

$$\mathbf{v}_{R_c} = \frac{m v_\parallel^2}{qB}\frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

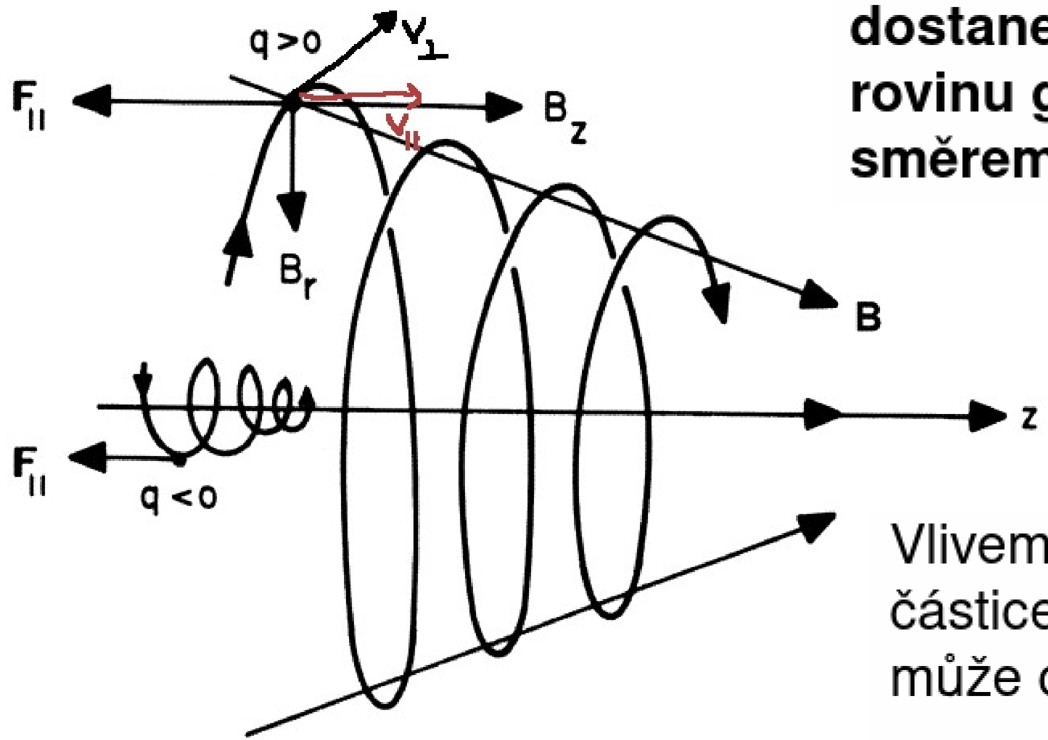
Kombinace driftu zakřivení a grad-B driftu:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{vf}} = \left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right)\frac{m}{qB}\frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

- $\mathbf{v}_{\mathrm{vf}}$ závisí na hmotnosti částic: proud je dán převážně driftem iontů

Silové působení v konvergentním $\mathbf{B}$ poli

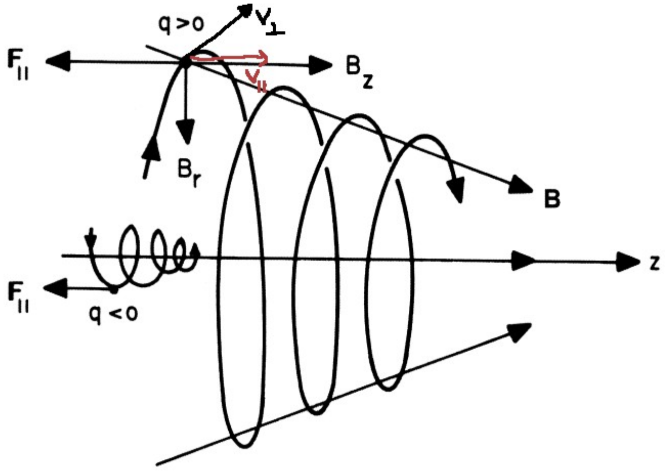
Uvažujme konvergentní magnetické pole ($B_\varphi = 0$), částice v něm gyruje kolmou rychlostí $\mathbf{v}_\perp$ a pohybuje se podél $\mathbf{B}$ rychlostí $\mathbf{v}_\parallel$.



Díky existenci nenulové radiální složky B_r, dostaneme sílu která působí kolmo na rovinu gyrace a vytlačuje gyrující částici směrem ze silícího magnetického pole.

Vlivem působení existující nenulové F_z se částice od houstnoucího magnetického pole může odrazit. Na tomto efektu je založené *magnetické zrcadlo*.

Silové působení v konvergentním $\mathbf{B}$ poli



Tím že je $\mathbf{B}$ pole konvergentní, existuje nenulová radiální složka B_r. Použitím Maxwellovy rovnice $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ve válcových souřadnicích

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

zjistíme vztah mezi radiální složkou B_r a podélnou složkou B_z magnetického pole. Máme $B_\varphi = 0$, proto

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

pomalu konvergentní pole

$$B_r(r) = \cancel{B_r|_{r=0}} + r\left(\frac{\partial B_r}{\partial r}\right) + \mathrm{h.o.t}$$

z $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ dostaneme

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq -\frac{2B_r}{r}$$

Pro částici gyrující na poloměru $r = r_c$, pak na kladnou i zápornou částici působí síla:

$$F_z = -|q|v_\perp \frac{r_c}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

První adiabatický invariant

Dipólový moment μ gyrující částice, je a diabatickým invariantem!

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} \qquad W_\perp = \mu B$$

Kinetickou energii částice rozdělíme na složku kolmou a rovnoběžnou

$$W = W_\perp + W_\parallel = \frac{1}{2}mv_\perp^2 + \frac{1}{2}mv_\parallel^2$$

$$\frac{\mathrm{d}W_\perp}{\mathrm{d}t} = \mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \mu v_\parallel\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} + B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\mathrm{d}t} = F_z = -\mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} \quad \Big| \cdot v_\parallel$$

$$\frac{\mathrm{d}W_\parallel}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) = -\mu v_\parallel\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}$$

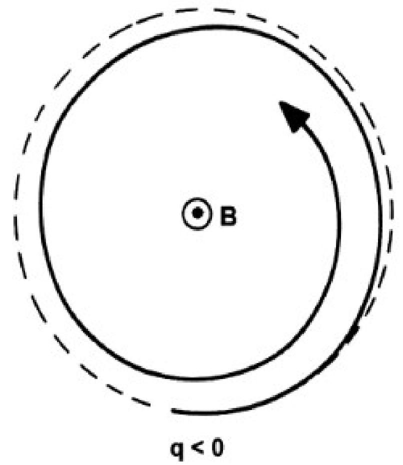
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}W_\perp}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_\parallel}{\mathrm{d}t} = \mu v_\parallel\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} - \mu v_\parallel\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} = 0} \longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = 0}$$

Magnetický moment se při pohybu částice v pomalu konvergentvním magnetickém poli nemění!!!

Pozorujeme přelévání kinetické energie mezi rovnoběžnou a kolmou složkou kinetické energie.

Magnetický ohřev plazmatu

- Sílící B povede na **kompresi** plazmatu.
- Slábnoucí B povede na **dekompresi** plazmatu.



Komprese a dekomprese mají vliv jen na $W_\perp$ částic a neovlivňuje $W_\parallel$. Pro ohřev plazmatu je nutné mezi kompresí a dekompresí nechat systém chvíli relaxovat srážkami. Ty převedou část energie uložené po kompresi v $W_\perp$ do $W_\parallel$.

Cyklus:

[: $\longrightarrow$ Komprese $\longrightarrow$ Relaxace $\longrightarrow$ Dekomprese $\longrightarrow$:]

vede na *magnetický ohřev plazmatu.*

Časová škála gyrace T_c musí být mnohem kratší než časová škála komprese T_k a ta musí být mnohem kratší než časová škála relaxace plazmatu do tepelné rovnováhy T_r:

$$T_c \ll T_k \ll T_r.$$