

# Srážky částic

Změna koncentrace nalétávajících částic  $dn_T$ :

$$dn_T = -\sigma n_F n_T dx$$

$\sigma$  má fyzikální rozměr plochy  $m^2$

'-' je tam protože srážky vedou na ztrátu částic ze svazku

Změna hustoty toku nalétávajících částic:

$$d\Gamma = v dn_T = -\sigma v n_F n_T dx$$

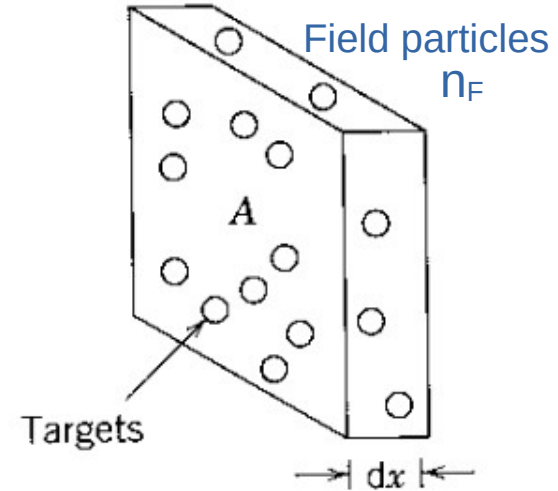
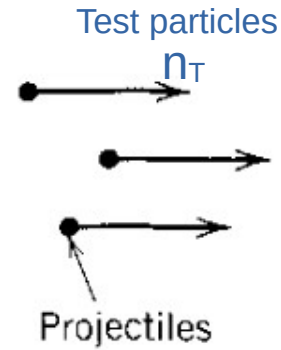
$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\sigma n_F dx$$

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \exp(-\sigma n_F x) = \Gamma_0 \exp(-x/\lambda)$$

$\lambda$  charakteristická vzdálenost změny  $\Gamma$   
(vzdálenost mezi interakcemi TP a FP)

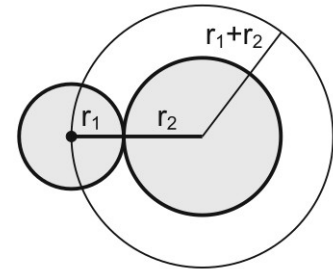
**Střední volná dráha:**

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_F}$$



## Srážka tuhých koulí

$$\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 = \text{const.}$$



# Charakteristiky srážek

**Střední doba mezi srážkami částic  $\tau$ :**

$$\lambda = v\tau = \frac{1}{\sigma n_F} \quad \rightarrow \quad \tau = (v\sigma n_F)^{-1}$$

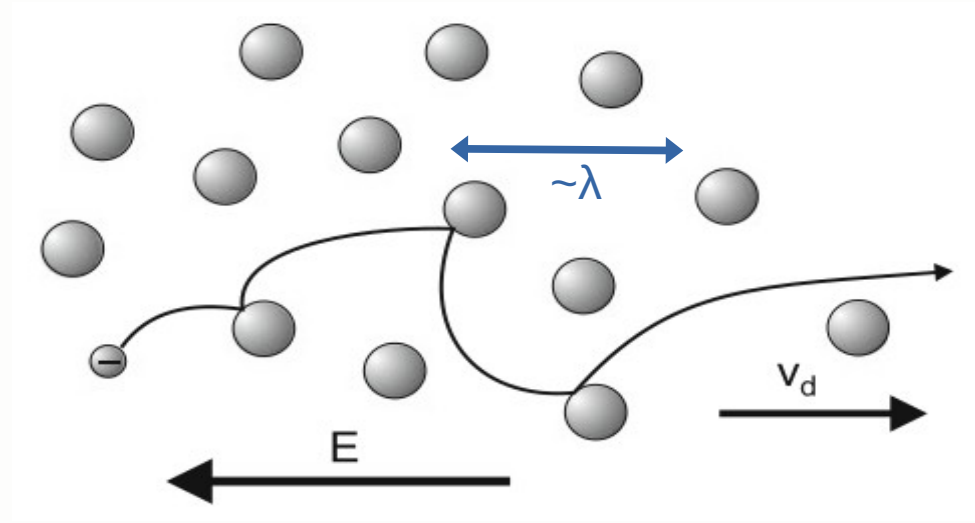
**Srážková frekvence**

$$\nu = \tau^{-1} = v\sigma n_F$$

**Časová změna hustoty částic svazku:**

$$\frac{dn_T}{dt} = -n_F n_T \sigma \frac{dx}{dt} = -n_F n_T \sigma v = -k n_F n_T$$

Rychlostní konstanta:  $k = \nu / n_F = \sigma v$



# Diferenciální účinný průřez $I(v, \theta)$

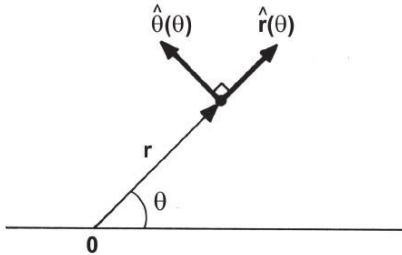
Zachování toku částic vede na rovnici pro dopadající tok:

$$\Gamma 2\pi b db = -\Gamma I(v, \theta) 2\pi \sin(\theta) d\theta$$

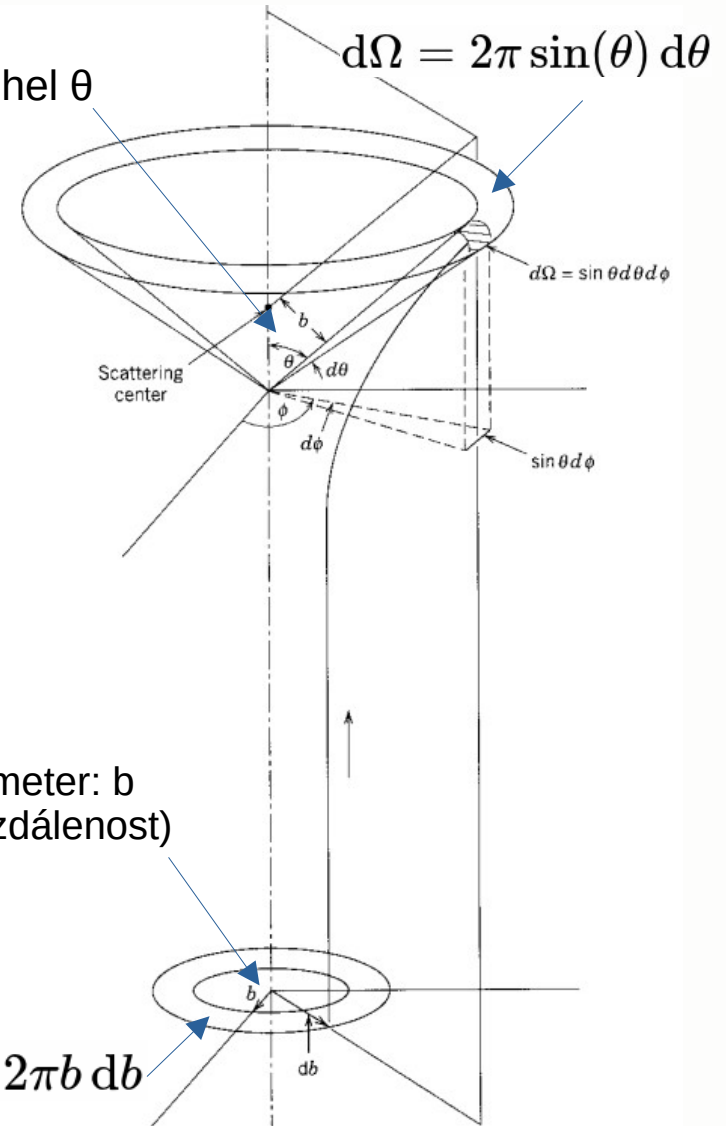
$$I(v, \theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

nutné určit ze znalosti interakčního potenciálu

$$d\theta = \pm \frac{b}{r^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2} \right]^{-1/2} dr$$



Rozptylový úhel  $\theta$



# Příklad: diferenciální účinný průřez pro srážku tuhých koulí

Impaktní parameter je  $b = a_{12} \sin \chi$ ,  $\theta = \pi - 2\chi$  pak

$$b db = a_{12}^2 \sin \chi \cos \chi d\chi = \frac{1}{2} a_{12}^2 \sin(2\chi) d\chi = -\frac{1}{4} a_{12}^2 \sin \theta d\theta$$

Diferenciální účinný průřez pak je

$$I(v, \theta) = \frac{1}{4} a_{12}^2$$

## Dále definujeme:

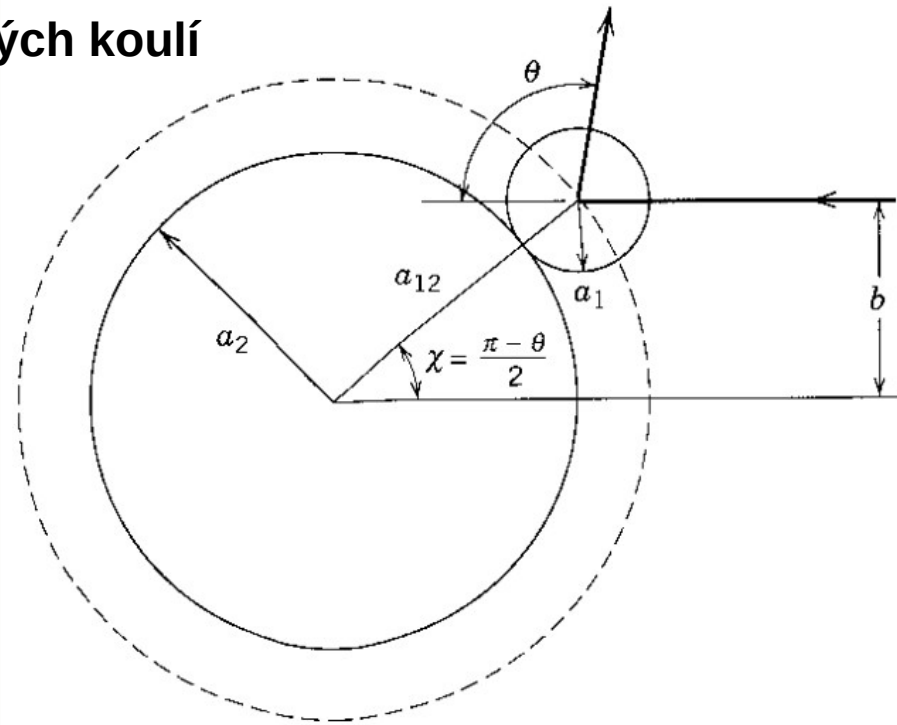
- *Totální účinný průřez* (celkový účinný průřez pro rozptyl do libovolného úhlu)

$$\sigma_{cs} = 2\pi \int_0^\pi I(v, \theta) \sin \theta d\theta$$

- *Účinný průřez pro přenos hybnosti*

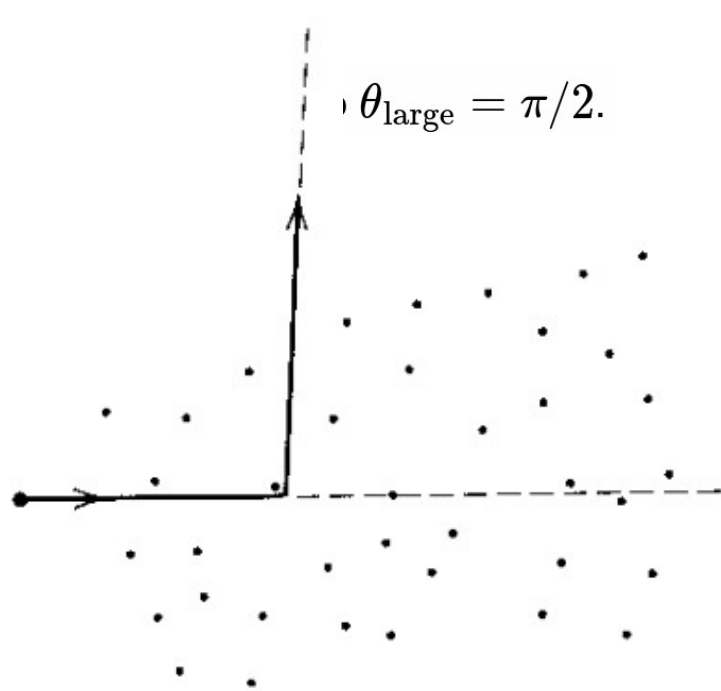
$$\sigma_{mt} = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \theta) I(v, \theta) \sin \theta d\theta$$

Faktor  $(1 - \cos \theta)$  je zlomek hybnosti dopadající částice  $mv$  který částice ztratí při rozptylu pod úhlem  $\theta$ . Pro dopředný rozptyl máme  $\cos \theta = 1$ , pro zpětný rozptyl máme  $\cos \theta = -1$ .

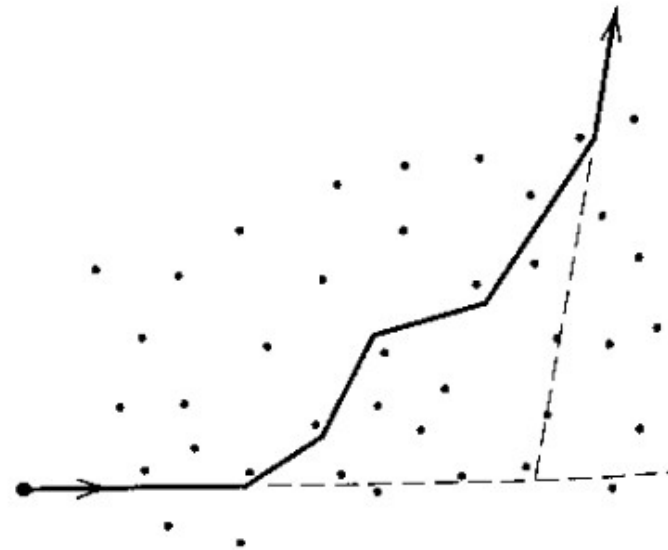


# Srážky nabitých částic v plazmatu

- a. *nabité částice se přiblíží na krátkou vzdálenost: výsledkem je odchýlení nalétávající částice pod velkým úhlem  $\theta_{\text{large}}$  od původního směru.*
- b. *nalétávající částice jen 'lízne' interakční potenciál: výsledkem je odchýlení nalétávající částice pod malým úhlem  $\theta_{\text{small}}$  od původního směru.*



(a)



(b)

Dalekodosahová interakce,  
Odstínění na:  $\lambda_D$

# Rutherfordův rozptyl:

$$\tan(\theta/2) = \frac{q_T q_F}{4\pi\epsilon_0 b \mu v_0^2} \sim \frac{\text{Coulombovská interakční energie}}{\text{kinetická energie}}$$

$\mu$  je redukovaná hmotnost  
 $b$  je záměrný parametr  
 $v_0$  počáteční relativní rychlost

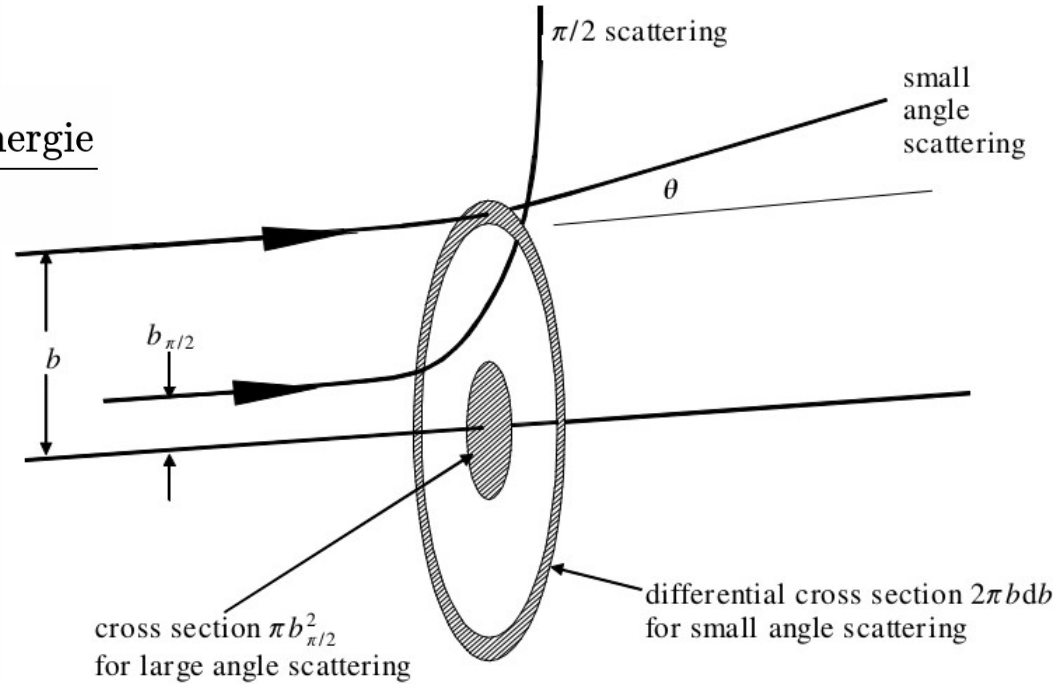
Impaktní parametr pro  $\theta_{\text{large}}$ :

$$\theta = \pi/2 \rightarrow \tan(\pi/4) = 1 \rightarrow b_{\pi/2} = \frac{q_T q_F}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2}$$

Účinné průřezy:

$$\sigma_{\text{large}} = \pi b_{\pi/2}^2$$

$$\sigma_{\text{small}} = \pi(\lambda_D^2 - b_{\pi/2}^2)$$



Srážky s malým úhlem rozptylu jsou hodně časté, ale úhel rozptylu je malý.

Otázka: **Jaký je kumulativní efekt srážek s malým úhlem rozptylu???**

Všechny srážky s malým úhlem rozptylu až do odstínění potenciálu

# Kumulativní efekt srážek

Úhly rozptylu jsou v náhodných směrech, střední hodnota bude nulová,

$$\sum_i^{N_{\text{coll}}} \theta_i \rightarrow 0,$$

Rozptyl je náhodný proces, podívejme se tedy na kvadrát rozptylového úhlu  $\theta_i^2$

$$\tan(\theta/2) \sim \theta/2 \quad (\theta \text{ je malé}) \longrightarrow \theta(b) = \frac{2q_T q_F}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 b} = \frac{2b_{\pi/2}}{b}$$

Střední hodnota  $\theta_i^2$  pro jeden malý rozptyl, je:

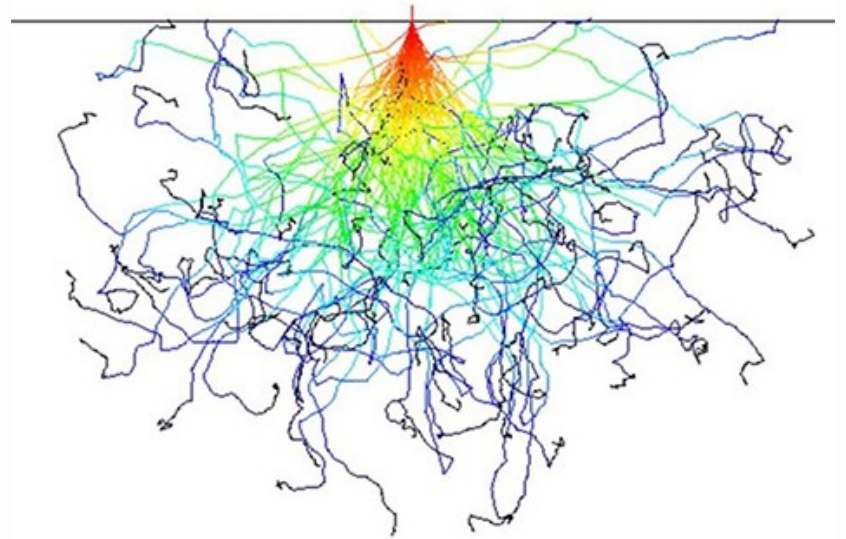
$$\langle \theta_i^2 \rangle = \frac{1}{\sigma_{\text{small}}} \int_{b_{\pi/2}}^{\lambda_D} \frac{4b_{\pi/2}^2}{b^2} 2\pi b db.$$

Kolik takových malých rozptylů musí nastat aby měly stejný efekt jako jeden velký rozptyl????

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = N_{\text{cum}} \langle \theta_i^2 \rangle = N_{\text{cum}} \frac{8b_{\pi/2}^2 \pi}{\sigma_{\text{small}}} \ln(\lambda_D/b_{\pi/2}) \quad \boxed{\sim 1}$$

$$N_{\text{cum}} = \frac{\sigma_{\text{small}}}{8\pi b_{\pi/2}^2 \ln(\lambda_D/b_{\pi/2})}$$

**Za jak dlouho se nasčítá  $N_{\text{cum}}$  malých srážek a za jak dlouho nastane jedna veklá?**



Coulombovský logaritmus

**Za jak dlouho se nasčítá  $N_{\text{cum}}$  malých srážek a za jak dlouho nastane jedna velká?**

$$N_{\text{cum}} = \frac{\sigma_{\text{small}}}{8\pi b_{\pi/2}^2 \ln(\lambda_D/b_{\pi/2})}$$

Chceme porovnat:

$$N_{\text{cum}} \tau_{\text{small}} \quad \text{VS} \quad \tau_{\text{large}}$$

kde  $\tau_{\text{small}} = (v\sigma_{\text{small}}n_F)^{-1}$  a  $\tau_{\text{large}} = (v\sigma_{\text{large}}n_F)^{-1}$ .

$$\frac{\sim 10^{-2}}{1} \frac{1}{8 \ln(\lambda_D/b_{\pi/2}) v \pi b_{\pi/2}^2 n_F} \ll \frac{1}{v \pi b_{\pi/2}^2 n_F}$$

**Coulombovské srážky s malým úhlem rozptylu mají tedy mnohem větší efekt než Coulombovské srážky s velkým úhlem rozptylu!**

střední doba za kterou se nakumuluje efekt srážek o malý úhel na velký úhel

$\ll$

Charakteristický čas kdy nastane 'velká' srážka

# Coulombovský logaritmus

---

Poměr  $\lambda_D/b_{\pi/2}$  se označuje  $\Lambda$  a  $\ln \Lambda$  se nazývá Coulombovský logaritmus. Uvažujeme-li

$$mv^2/2 = 3k_B T/2$$

a pro e-e srážky

$$\mu = m_e/2,$$

pak

$$\Lambda = \lambda_D/b_{\pi/2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{ne^2}} \frac{4\pi\varepsilon_0 mv^2/2}{e^2} = 6\pi n \lambda_D^3.$$

Jedno z kritérií pro plazma říkalo, že počet částic v Debyeovské kouli je mnohem větší než jedna ( $n\lambda_D^3 \gg 1$ ), tedy

Velké číslo:  $\longrightarrow \Lambda \gg 1$ .

Hodnota  $\ln \Lambda$  se pohybuje v rozmezí od 8 do 25 pro většinu plazmat.

# Účinný průřez pro Coulombovské srážky v plazmatu

Účinný průřez pro Coulombovské srážky v plazmatu můžeme napsat uvážíme-li efektivní dobu  $\tau^*$  za kterou budou srážky s malým úhlem rozptylu mít velký vliv

$$\tau^* = N_{\text{cum}} \tau_{\text{small}} = N_{\text{cum}} (n_F \sigma v)^{-1} = (n_F \sigma^* v)^{-1}.$$

Pak

$$\sigma^* = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{q_T q_F}{\epsilon_0 \mu v_0^2} \right)^2 \ln(\lambda_D / b_{\pi/2})$$

$\sigma^*$  klesá se čtvrtou mocninou relativní rychlosti částic. V horkém plazmatu, kdy  $v_0$  je velké budou Coulombovské srážky méně důležité v porovnání s ostatními jevy.

## Kdy je důležité uvážit srážky?

O důležitosti nebo nedůležitosti srážek je možné rozhodnout na základě:

- porovnání srážkové frekvence  $\nu = v\sigma n$  s frekvencí jiných efektů,
- nebo střední dráhy mezi srážkami  $\lambda_{\text{mfp}} = (\sigma n)^{-1}$  s charakteristickou délkou jiných efektů.

## Srážky elektronů a iontů s neutrálními atomy a molekulami

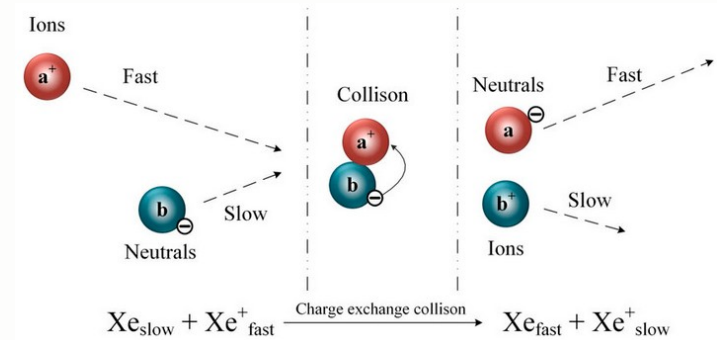
(Krátkodosahová interakce) Typický rozměr atomu je  $10^{-10}$  m, účinný průřez pak je

$$\sigma_{\text{neut}} \sim 3 \times 10^{-20} \text{ m}^2.$$

- \* **elastická**, kdy se nemění vnitřní energie neutrálu, nebo
- \* **neelastická**, kdy část kinetické energie elektronu přejde do energie vnitřního stavu neutrálu (excitace, ionizace).

**V případě iontu:** může nastat srážka s výměnou náboje (**charge exchange collision**). Iont dopadající na neutrální částici může přetáhnout elektron neutrální částici, ze které se stane iont, zatímco dopadající iont se zachyceným elektronem neutralizoval.

- **neutral beam injection (tokamak) (+)**
- **návrat záporných iontů v iontovém motoru (-)**



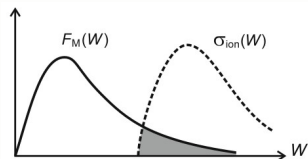
# Příklad účinných průřezů: elektrony v argonu

**Elastická srážka:** kinetická energie kolizních partnerů je zachována

**Ne-elastická srážka:** kinetická energie kolizních partnerů je zmenší na úkor zvýšení vnitřní energie atomu/molekuly.

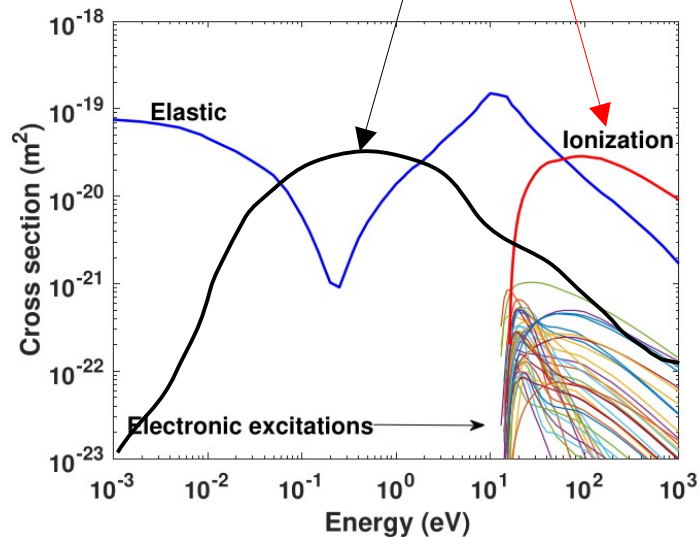
**Super-elastická srážka:** vnitřní energie atomu/molekuly se přenění na kinetickou energii srážejících se částic.

**Ionizace:** při srážce vznikne nový elektron a iont.



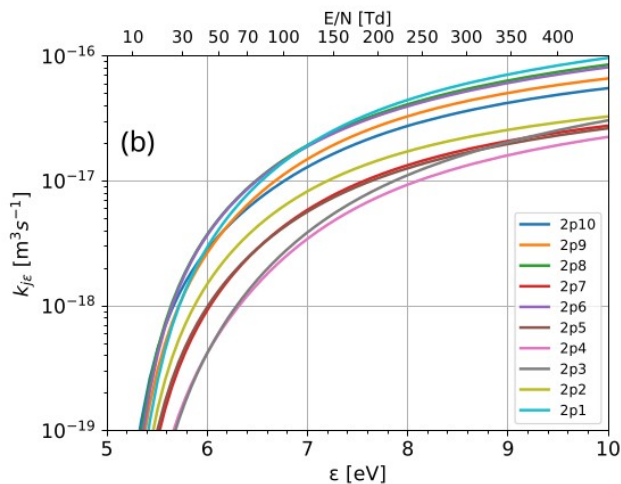
**Výpočet ionizační frekvence:**

$$\nu_{\text{ion}} = n_a \langle \sigma_{\text{ion}} v \rangle = \frac{n_a}{n_e} \int_0^{\infty} f_{M,e}(v) \sigma_{\text{ion}}(v) v dv$$



**Výpočet rychlostní konstatny k [m³/s]:**

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_e} \int_0^{\infty} \sigma_{\text{ion}}(v) v f_e(v) dv$$



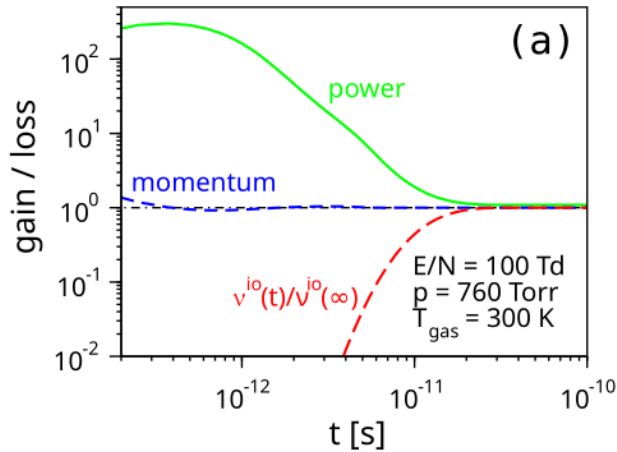
Index	Species	Energy level [eV]
1	Ar <sub>1p0</sub>	0
2	Ar <sub>2</sub> <sup>*</sup> ( <sup>3</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup> , v=0)	9.76
3	Ar <sub>2</sub> <sup>*</sup> ( <sup>1</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup> , v=0)	9.84
4	Ar <sub>2</sub> <sup>*</sup> ( <sup>3</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup> , v≫0)	11.37
5	Ar <sub>2</sub> <sup>*</sup> ( <sup>1</sup> Σ <sub>u</sub> <sup>+</sup> , v≫0)	11.45
6	Ar <sub>1s5</sub>	11.55
7	Ar <sub>1s4</sub>	11.62
8	Ar <sub>1s3</sub>	11.72
9	Ar <sub>1s2</sub>	11.83
10	Ar <sub>2p10</sub>	12.91
11	Ar <sub>2p9</sub>	13.08
12	Ar <sub>2p8</sub>	13.10
13	Ar <sub>2p7</sub>	13.15
14	Ar <sub>2p6</sub>	13.17
15	Ar <sub>2p5</sub>	13.27
16	Ar <sub>2p4</sub>	13.28
17	Ar <sub>2p3</sub>	13.30
18	Ar <sub>2p2</sub>	13.33
19	Ar <sub>2p1</sub>	13.48
20	Ar <sub>h1</sub> <sup>*</sup>	13.85
21	Ar <sub>2</sub> <sup>+</sup>	14.50
22	Ar <sup>+</sup>	15.76
23	e	—

# Argon: řešení BKR pro homogenní plazma

$$\frac{\partial}{\partial t} F - \frac{e_0}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F = C^{\text{el}} + \sum_m C_m^{\text{in}},$$

$$F(v, v_z/v, t) = \sum_{n=0}^{l-1} F_n(v, t) P_n(v_z/v).$$

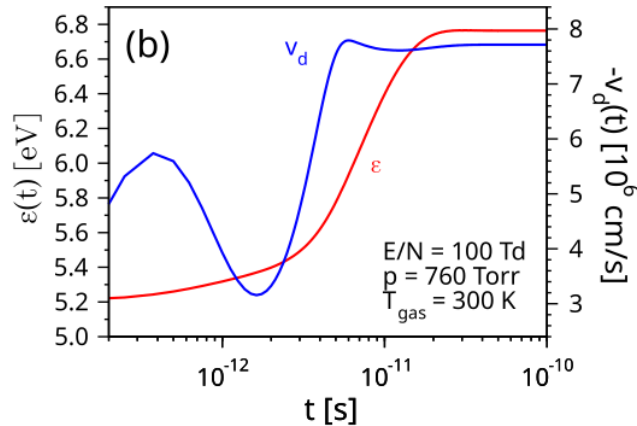
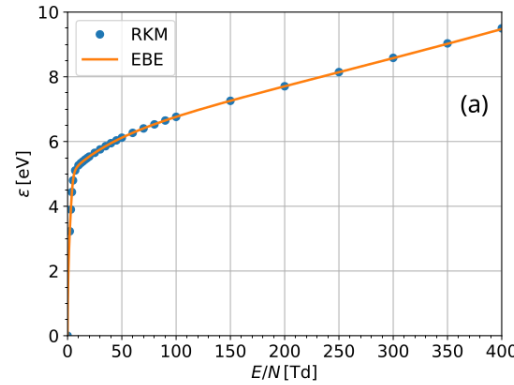
Relaxace makroskopických parametrů:



$$n_e(t) = \int_0^\infty U^{1/2} f_0(U, t) dU,$$

$$\epsilon(t) = \frac{1}{n_e(t)} \int_0^\infty U^{3/2} f_0(U, t) dU$$

$$v_d(t) = \frac{1}{3n_e(t)} \left(\frac{2}{m_e}\right)^{1/2} \int_0^\infty U f_1(U, t) dU,$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_0 - \frac{e_0}{3} \left(\frac{2}{m_e U}\right)^{1/2} E(t) \frac{\partial}{\partial U} (U f_1) \\ - U^{-1/2} \frac{\partial}{\partial U} \left( U^{3/2} \frac{2m_e}{M} v^{\text{el}}(U) f_0 \right) + \sum_m v_m^{\text{in}}(U) f_0 \\ - \sum_m \left(\frac{U + U_m^{\text{in}}}{U}\right)^{1/2} v_m^{\text{in}}(U + U_m^{\text{in}}) f_0(U + U_m^{\text{in}}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_n - \frac{n}{2n-1} \left(\frac{2}{m_e}\right)^{1/2} e_0 E(t) \\ \times \left[ U^{1/2} \frac{\partial}{\partial U} f_{n-1} - \frac{n-1}{2} U^{-1/2} f_{n-1} \right] \\ - \frac{n+1}{2n+3} \left(\frac{2}{m_e}\right)^{1/2} e_0 E(t) \\ \times \left[ U^{1/2} \frac{\partial}{\partial U} f_{n+1} + \frac{n+2}{2} U^{-1/2} f_{n+1} \right] \\ + \left( v^{\text{el}}(U) + \sum_m v_m^{\text{in}}(U) \right) f_n = 0, \quad 1 \leq n \leq l-2 \end{aligned}$$

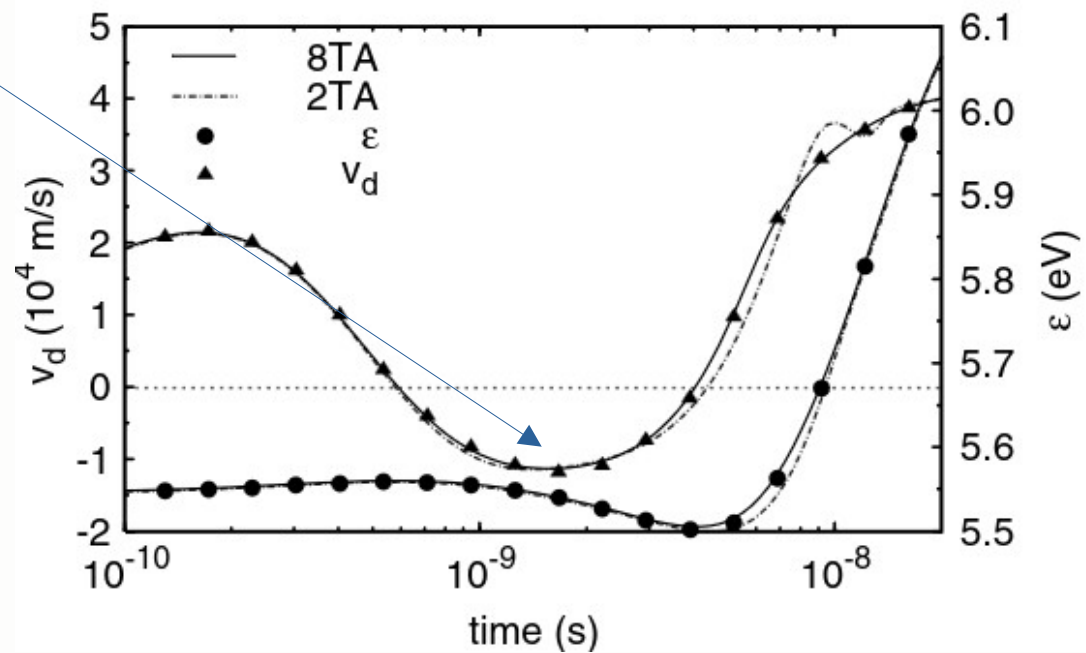
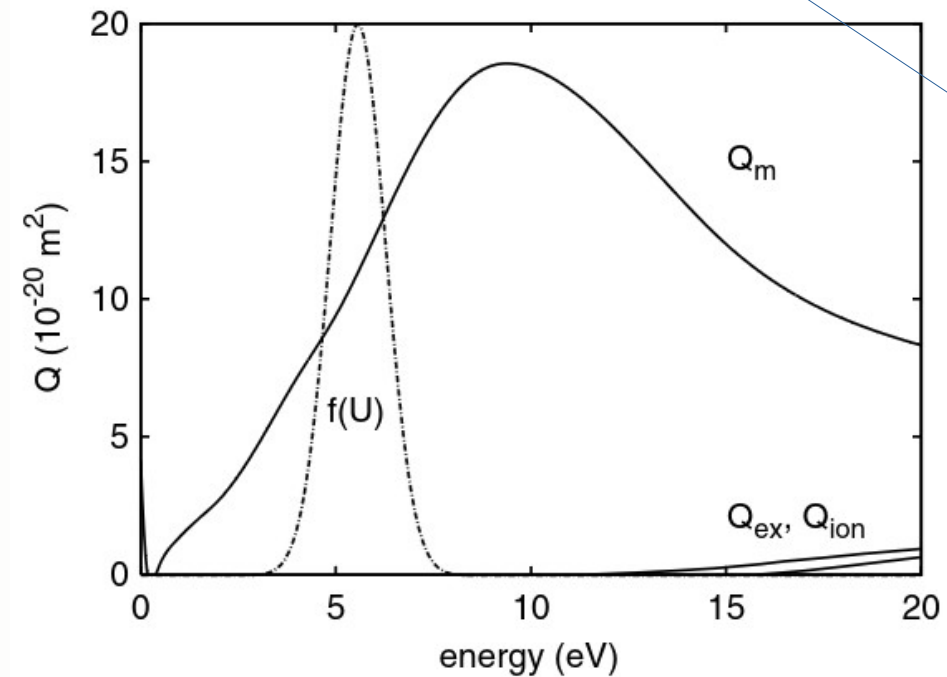
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_{l-1} - \frac{l-1}{2l-3} \left(\frac{2}{m_e}\right)^{1/2} e_0 E(t) \\ \times \left[ U^{1/2} \frac{\partial}{\partial U} f_{l-2} - \frac{l-2}{2} U^{-1/2} f_{l-2} \right] \\ + \left( v^{\text{el}}(U) + \sum_m v_m^{\text{in}}(U) \right) f_{l-1} = 0, \end{aligned}$$

$$f_n(U, t) = 2\pi \left(\frac{2}{m_e}\right)^{3/2} F_n(v(U), t).$$

$$v^{\text{el}}(U) = \left(\frac{2}{m_e}\right)^{1/2} U^{1/2} N Q^{\text{el}}(U),$$

$$v_m^{\text{in}}(U) = \left(\frac{2}{m_e}\right)^{1/2} U^{1/2} N Q_m^{\text{in}}(U)$$

# Argon: Přebodová negativní mobilita elektronů



# Ubíhající (runaway) elektrony

Ubíhající (runaway) elektrony mohou vzniknout v případě je-li odporová síla mezi elektrony a okolním prostředím klesající funkcí energie.

Odporová síla mezi elektrony a okolním prostředím:

$$F_D(\varepsilon) = \sum_j N_j \sigma_j(\varepsilon) \delta\varepsilon_j$$

zahrnuje všechny neelastické procesy (se ztrátou energie  $\delta\varepsilon_j$ ),  $N_j$  je koncentrace jednotlivých molekul (vzduch:  $N_2$ ,  $O_2$ , Ar, ...).

